

Zadání písemné zkoušky z Matematiky 2

FSV UK, LS 2023-24

VZOR

1. Určete definiční obor funkce f , spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[0, 2]$.

$$f(x, y) = \sqrt[3]{y^2 - \cos x}.$$

(12 bodů)

2. Nalezněte maximum a minimum funkce f na množině M .

$$f(x, y) = x^2 - 2x + 4y + 6xy + y^2,$$

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; y \geq -1, x + y \leq 1, x - y \geq -1\}$$

(13 bodů)

3. Mějme následující dva vztahy

$$\sin x + \sin y + \sin u + \sin(2v) = 0,$$

$$u \cos x + v \cos y + \cos u + \cos v = 2.$$

Ukažte, že vztahy definují na okolí bodu $(0, 0, 0, 0)$ funkce u, v proměnných x, y třídy $\mathcal{C}^1$, pro které platí $u(0, 0) = 0, v(0, 0) = 0$. Spočtěte $\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0)$ a $\frac{\partial u}{\partial y}(0, 0)$.

(12 bodů)

4. Spočtěte následující primitivní funkci na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$$\int \frac{1}{(\cos^2 y) \cdot (\cos^2 y + \sin 2y + 1)} dy$$

(13 bodů)

Výsledky

1. $D(f) = \mathbb{R}^2$; $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{3} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{(y^2 - \cos x)^2}}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{3} \frac{2y}{\sqrt[3]{(y^2 - \cos x)^2}}$ pro $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ splňující $y^2 - \cos x \neq 0$; v bodech $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ splňujících $y^2 - \cos x = 0$ parciální derivace neexistují (= definiční limity jsou nevlastní nebo neexistují); tečná rovina: $T(x, y) = \sqrt[3]{3} + \frac{4}{3\sqrt[3]{9}}(y - 2)$

2. bod maxima: $[-2, -1]$; bod minima: $[2, -1]$

3. $\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = 1, \frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) = 1$

4. $\lg y - \log(\operatorname{tg}^2 y + 2 \operatorname{tg} y + 2) + \arctg(\operatorname{tg}(y) + 1), y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$